Практическое занятие №15.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Приложения двойного интеграла.**

№	Задания
1	Используя двойной интеграл, вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: a) $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=\pm 2$ b) $xy=4$; $y=x$; $x=4$. c) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\pi$. d) $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$
2	Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями: a) $z=1+x+y$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. b) $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $\lvert x+y\rvert\le\frac{\pi}{2}$, $\lvert x-y\rvert\le\frac{\pi}{2}$
3	Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями: a) $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$. b) $e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

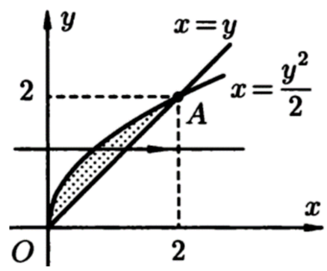
Задача из Лекции №15 (ФИТ)

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$; $x+y-2=0$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2x$ и $y=x$.



Имеем $S=\iint\limits_D dxdy$. Направление, или порядок, интегрирования выберем так, как указано на чертеже (рис. 24).

Сначала определим координаты точки A:

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x, \end{cases} \Rightarrow x^2=2x \Rightarrow x_1=0,\ y_1=0 \text{ и } x_2=2,\ y_2=2.$$

Проекция области D на ось Oy есть отрезок $[0,2]$. Таким образом,

$$S=\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx=\int_0^2 dy\cdot x\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y}=\int_0^2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3}$$

Пример:

Вычислить площадь параболического сегмента AOB, ограниченного дугой BOA параболы $y=ax^2$ и отрезком BA, соединяющим точки $B(-1,2)$ и $A(1,2)$.

Ясно, что уравнение параболы имеет вид $y=2x^2$ $(y(-1)=y(1)=2)$. Фигура D, площадь которой надо вычислить, ограничена снизу параболой $y=2x^2$, а сверху — прямой $y=2$. Следовательно,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{2x^2}^{2}dy=2\int_0^1(2-2x^2)\,dx=4\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}.$$

Пример:

Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$$

❍ Под петлей будем подразумевать область, ограниченную данной кривой и расположенную в первой четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). Воспользуемся обобщенными полярными координатами: $x = a \cdot r\cos\varphi$, $y = b \cdot r\sin\varphi$. В таком случае, якобиан преобразования равен

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -ar\sin\varphi\\ b\sin\varphi & br\cos\varphi\end{vmatrix}=a\cdot b\cdot r.$$

Кривая в полярных координатах имеет вид

$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2=\frac{2abr^2\sin\varphi\cos\varphi}{c^2},$$

т. е. $(r^2)^2=\dfrac{abr^2\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{c^2}$, откуда $r=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}$. Внутренность петли, т. е. область интегрирования D в прямоугольных координатах, задается неравенством

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\leqslant\frac{2xy}{c^2}.$$

В полярных координатах соответствующая область интегрирования G определяется неравенством $0\leqslant r\leqslant\dfrac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}$, при этом $\sin 2\varphi\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_G abr\,drd\varphi=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}}r\,dr=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\cdot\sqrt{\sin 2\varphi}}\right)=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ab}{c^2}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{a^2b^2}{2c^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d\varphi=\left(\frac{ab}{2c}\right)^2$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(4x-7y+8)^2+(3x+8y-9)^2=64.$$

❍ Вычисления по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

неприемлемы ввиду сложности пределов интегрирования. Произведем замену переменных по формулам

$$\begin{cases}4x-7y+8=u\\ 3x+8y-9=v,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{53}(8u+7v+1)\\ y=\dfrac{1}{53}(-3u+4v+60).\end{cases}$$

При этом $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{8}{53}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{7}{53}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}=-\dfrac{3}{53}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{4}{53}$, т. е.

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{8}{53} & \dfrac{7}{53}\\ -\dfrac{3}{53} & \dfrac{4}{53}\end{vmatrix}=\frac{1}{53}.$$

В плоскости координат (u, v) соответствующая линия имеет вид $u^2+v^2 = 64$, т. е представляет собой окружность, а область G — круг $u^2+v^2 \leqslant 64$ с площадью $S(G) = 64\pi$. Используя соответствующие формулы, получаем

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G J\,dudv = \iint\limits_G \frac{1}{53}\,dudv = \frac{1}{53}S(G) = \frac{64\pi}{53}. \qquad \bullet$$

Пример:

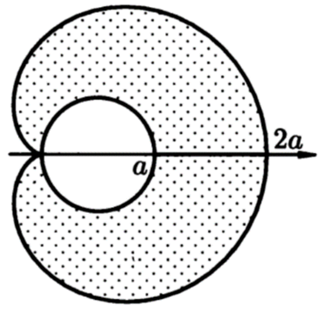
Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$r = a(1+\cos\varphi), \quad r = a\cos\varphi, \qquad (a>0).$$

◑ Линии даны в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой площади в полярных координатах

$$S = \iint\limits_G r\,drd\varphi.$$

Первая функция $r = a(1+\cos\varphi)$ определена при $\varphi \in [-\pi, \pi]$, а вторая $r = a\cos\varphi$ — при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как при прочих значениях φ получается $r<0$. Соответствующая область имеет вид, изображенный на рис. 25. Ввиду симметрии фигуры относительно полярной оси можно ограничиться вычислением половины площади, а результат удвоить. Имеем



$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\varphi)\,d\varphi + a^2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= a^2\left[\int\limits_0^{\pi} (1+2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1+\cos 2\varphi)}{2}\,d\varphi\right] = \frac{5}{4}\pi a^2$$

Пример:

7. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями $z=0$, $z = x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$.

△ Данное тело можно представить в виде $T = \{(x,y,z)\colon (x,y)\in G,\ 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}$, где G — область на плоскости (x,y), ограниченная кривыми $y=x^2$ и $y=1$, т. е. $G=\{(x,y)\colon -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\}$. Применяя формулу (9) и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$V = \iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[x^2(1-x^2) + \frac{1}{3}(1-x^6)\right] dx = \frac{88}{105}. \ \blacktriangle$$

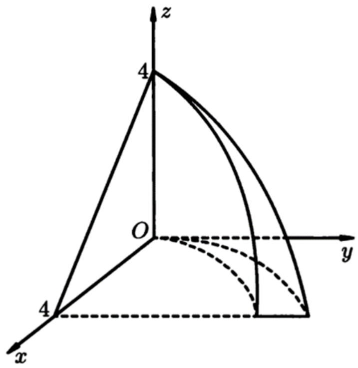
$$V = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (9)$$

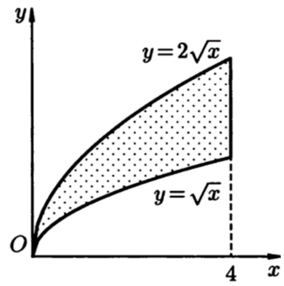
Пример:

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

◔ Первые два уравнения изображают параболические цилиндры с вертикальной образующей, третье, т. е. $x + z = 4$ — уравнение наклонной плоскости, а уравнение $z = 0$ — плоскость Oxy. Соответствующее тело изображено на рис. 26; сверху его ограничивает поверхность $z = 4 - x$.
Объем тела вычислим по формуле

$$V = \iint_D (4 - x)\,dxdy,$$





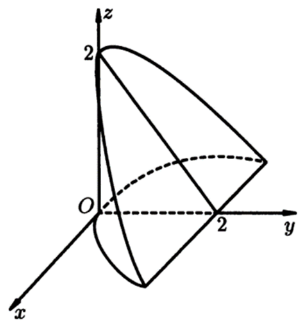
где область D изображена на рис. 27. Имеем

$$V = \int_0^4 (4 - x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 (4 - x)\,dxy\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\,dx = \left(4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{128}{15}$$

Пример:

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = x^2$.



◔ Тело, объем которого нужно вычислить, изображено на рис. 28. В силу симметрии тела (клина) относительно плоскости Oyz, вычислим объем половины тела и результат удвоим. Координаты точек A и B удовлетворяют системе уравнений $y = x^2$ и $y = 2$, откуда $A(\sqrt{2}, 2)$, $B(-\sqrt{2}, 2)$.
Следовательно,

$$V = \iint_D (2 - y)\,dxdy = 2\int_0^2 (2 - y)\,dy \int_0^{\sqrt{y}} dx = 2\int_0^2 (2 - y)\sqrt{y}\,dy =$$

$$= 2\left(2 \cdot \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^2 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

Пример:

Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

◔ Сфера симметрична относительно координатных плоскостей, поэтому ограничимся вычислением площади поверхности той ее части, что расположена в первом октанте, а результат умножим на 8. Запишем поверхность верхней полусферы явно, т. е. в виде $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, и воспользуемся соответствующей формулой. Имеем:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, найдем искомую площадь (заметим, что здесь мы имеем дело со сходящимся несобственным интегралом)

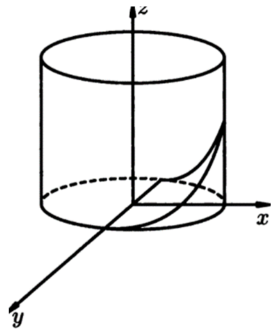
$$S = 8\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r\,drd\varphi = 8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= 8R \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Big|_0^R = 4\pi R^2. \quad ●$$

Пример:

Вычислить площадь S части поверхности параболоида $z = xy$, принадлежащей цилиндру $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

◐ Поскольку $z'_x = y$, $z'_y = x$, $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, то, переходя к полярным координатам, имеем:

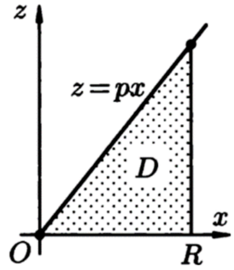


$$S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \iint\limits_{r \leqslant R} r\sqrt{1 + r^2}\, drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1 + r^2} \cdot \frac{1}{2} d(1 + r^2) = \frac{2\pi}{3}[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]. \quad ●$$

Пример:

Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = px$, $p > 0$.



◐ Поверхность цилиндра не может быть записана явной формулой $z = z(x, y)$, поэтому формула

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy$$

неприменима. Выразим в таком случае поверхность цилиндра (рис. 29) явно в виде $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ и воспользуемся формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dxdz,$$

где D — область, ограниченная прямыми $z = px$, $z = 0$, $x = R$ (рис. 30) в плоскости Oxz. Имея в виду знак $\pm$ перед радикалом, вычислим площадь половины поверхности, т. е. описываемой уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2}$, а результат удвоим. Имеем

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad y'_z = 0, \quad \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$S = 2\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dxdz = 2R \int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int\limits_0^{px} dz =$$

$$= 2pR \int\limits_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = -2pR(-\sqrt{R^2 - x^2})\Big|_0^R = 2pR^2. \quad ●$$

Пример:

Определить массу круглой пластины радиуса R с центром в начале координат, если поверхностная плотность материала пластины в точке $M(x, y)$ равна $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, где $k > 0$ — фиксированное число.

◐ Переходя от декартовых координат к полярным, имеем

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy =$$

$$= 4k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r^2\, dr = \frac{2\pi k R^3}{3}$$

Пример:

Найти массу круглой пластины D $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 3 - x - y$.

◐ Имеем:

$$m = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (3 - x - y)\, dxdy = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[(3-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1}2(3-x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}6\sqrt{1-x^2}\,dx-2\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Последний интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно началу координат отрезку. Поэтому, делая подстановку $x=\sin t$, получим

$$m=\int_{-1}^{1}6\sqrt{1-x^2}\,dx = 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = 3\pi$$

Пример:

Найти моменты инерции квадратной пластины $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$ относительно осей координат и начала координат, если плотность пластины пропорциональна ординате точки пластины с коэффициентом k.

Вычисления производим по соответствующим формулам этого параграфа учитывая, что $\rho(x,y)=xy$:

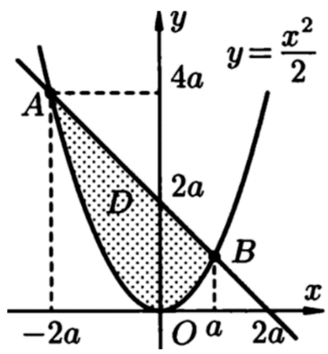
$$1)\ J_x=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant a}} ky\cdot y^2\,dxdy = k\int_0^a dx\int_0^a y^3\,dy=\frac{ka^5}{4}.$$

$$2)\ J_y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant a}} ky\cdot x^2\,dxdy = k\int_0^a x^2\,dx\int_0^a y\,dy=\frac{ka^5}{6}.$$

$$3)\ J_0=J_x+J_y=\frac{5ka^5}{12}.$$

Пример:

Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной параболой $ay=x^2$ и прямой $x+y=2a$, если плотность пластины постоянна и равна ρ_0.



Сделаем чертеж (рис. 31). Находим абсциссы точек A и B пересечения прямой $x+y=2a$ и параболы $y=\frac{x^2}{a}$. Из системы уравнений $\begin{cases}x+y=2a\\ y=\frac{x^2}{a}\end{cases}$ находим $x_1=-2a$ и $x_2=a$.

1) Масса пластины D равна

$$m=m(D)=\iint\limits_D \rho_0\,dxdy=\rho_0\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\rho_0\int_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\frac{9}{2}a^2\rho_0$$

2) Вычислим статические моменты пластины относительно координатных осей

$$M_x=\rho_0\iint\limits_D y\,dxdy=\rho_0\int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}y\,dy=\frac{1}{2}\rho_0\int_{-2a}^{a}\left[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right]dx=\frac{36}{5}\rho_0a^3$$

$$M_y=\rho_0\iint\limits_D x\,dxdy=\rho_0\int_{-2a}^{a}x\,dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy=\rho_0\int_{-2a}^{a}\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)x\,dx=-\frac{9}{4}a^3\rho_0$$

3) Координаты центра тяжести найдем теперь по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{m}=-\frac{a}{2},\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{8}{5}a.$$